

Rechnen mit Frequenzen I: Proportionen

Akustisch reine Intervalle folgen **ganzzahligen Verhältnissen**. (Für das Hören heisst das: diese Intervalle schweben nicht.)

Intervall	Proportion	Beispiel
Oktave	2 : 1	die Oktave über einem Ton mit 100 Hz ist $100 * 2 = 200$ Hz
Quinte	3 : 2	die Quinte über einem Ton mit 100 Hz ist $100 * 3/2 = 150$ Hz
Quarte	4 : 3	die Quarte über einem Ton mit 100 Hz ist $100 * 4/3 = 133,33$ Hz
Große Terz	5 : 4	die große Terz über einem Ton mit 100 Hz ist $100 * 5/4 = 125$ Hz
Kleine Terz	6 : 5	die kleine Terz über einem Ton mit 100 Hz ist $100 * 6/5 = 120$ Hz

Vergleicht man zwei Proportionen, setzt man sie wiederum zueinander in Proportion. Mathematisch gesehen teilt man sie also durch einander.

Bei der Ausführung hilft der Satz: Division durch einen Bruch ist Multiplikation mit seinem Kehrwert. (Ein Kuchen geteilt durch zwei ist dasselbe wie einhalb ($1/2$) mal der Kuchen.)

Beispiele:

- Das Verhältnis der Oktave zur Quinte ist $2/1 : 3/2 = 2/1 * 2/3 = 4/3$ (Quarte höher)
- Das Verhältnis der Quinte zur Oktave ist $3/2 : 2/1 = 3/2 * 1/2 = 3/4$ (Quarte tiefer)

Wendet man zwei Proportionen nacheinander an (musikalisch gesprochen heisst das: **Addition** der Intervalle), multipliziert man sie. *Beispiele:*

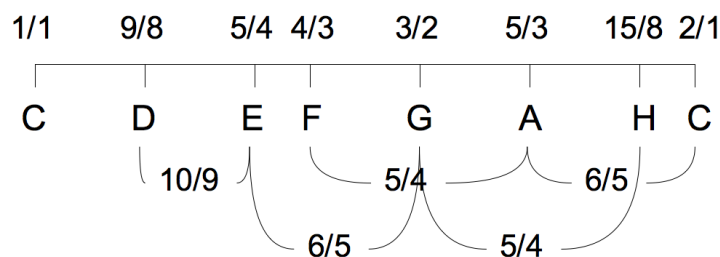
- Eine Quinte und eine Quarte ergibt eine Oktave: $3/2 * 4/3 = 12/6 = 2/1$
- Eine große und eine kleine Terz ergibt eine Quinte: $5/4 * 6/5 = 30/20 = 3/2$

Teilt man eine größere Porportion durch eine kleinere, bekommt man eine **neue Porportion**, sozusagen als Rest.

Beispiele:

- Teilung einer Quinte durch eine Quarte: $3/2 : 4/3 = 3/2 * 3/4 = 9/8$ ($9/8 =$ 'großer Ganzton')
- Teilung einer großen Terz durch den Ganzton $9/8$: $5/4 : 9/8 = 5/4 * 8/9 = 40/36 = 10/9$ ($10/9 =$ 'kleiner Ganzton')

So kann man durch verschiedene Teilungen auf einfache **Proportionen der Stamtöne** C D E F G A H kommen; beispielsweise auf diese:



Reine Intervalle führen untereinander zu interessanten **Widersprüchen**. *Beispiele:*

- 12 reine Quinten übereinander führen zu einem etwas höheren Ton als der 7. Oktave:
 12 Quinten: $(3/2)^{12} = 531441/4096$ 7 Oktaven: $(2/1)^7 = 128 = 524288/4096$
 Der Unterschied beträgt also $531441/524288$, oder anders gesagt, die zwölfte Quinte ist um den Faktor 1.013643 höher als die siebte Oktave. Dieses Verhältnis nennt man das *pythagoräische Komma*.
- Der 'große' ($9/8$) und der 'kleine' ($10/9$) Ganzton haben folgende Relation zueinander:
 $9/8 : 10/9 = 9/8 * 9/10 = 81/80$
 Das ist das *syntonische Komma*, das einem Faktor von 1.0125 entspricht.
 Auf dasselbe Ergebnis kommt man, wenn man zwei Ganztöne im Verhältnis $9/8$ mit einer reinen großen Terz ($5/4$) vergleicht:
 $(9/8 * 9/8) : 5/4 = 81/64 * 4/5 = 81/16 * 1/5 = 81/80$