Rechnen mit Frequenzen II: Gleichstufigkeit

Herleitung der Skala mit 12 gleichen Abständen

Eine Skala, in der alle Tonschritte untereinander den gleichen Abstand haben, nennt man **gleichschwebend temperiert** (bitte nicht verwechseln mit wohltemperiert!!). Das Prinzip ist extrem einfach: Hat man z.B. wie in unserem Tonsystem 12 gleiche Teile pro Oktave, sucht man eine Zahl, die man 12 mal als Faktor anwendet, um zur Oktave zu gelangen. Nennen wir diesen Faktor x, sieht der Vorgang in kleinen Schritten ausgedrückt so aus:

Intervall	Herleitung 1	Herleitung 2	Beispiel
Ausgangston	-	-	a' = 440 Hz
1. Halbton	Ausgangston * x	-	b' = 440 * x Hz
2. Halbton	1. Halbton * x	Ausgangston * x * x	h' = 440 * x^2 Hz
3. Halbton	2. Halbton * x	Ausgangston * x * x * x	c'' = 440 * x^3 Hz
4. Halbton	3. Halbton * x	Ausgangston * x * x * x * x	cis'' = 440 * x^4 Hz
...	...	...	...
12. Halbton	11. Halbton * x	Ausgangston * x^{12}	a'' = 440 * x^{12} Hz = 880 Hz

Wie in diesem Beispiel muss der zwölfte Halbton natürlich die Oktave erreichen. Da die Oktave das Schwingungsverhältnis 2:1 hat, gilt, dass das gesuchte x 12 mal mit sich selbst malgenommen 2 ergeben muss. In dem Beispiel:

$$440 * x^{12} = 880 \quad \Leftrightarrow \quad x^{12} = \frac{880}{440} \quad \Leftrightarrow \quad x^{12} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[12]{2}$$

Der gesuchte Faktor ist also $\sqrt[12]{2}$ ("zwölfte Wurzel aus zwei"), das man auch als $2^{1/12}$ schreiben kann. Das ist eine sogenannte irrationale Zahl, die man immer nur angenähert bestimmen kann. Der Computer (berechnet mit der Programmiersprache Python) gibt sie als 1.0594630943592953 heraus, und so kann man die 12 Halbtöne über dem Kammerton a'=440Hz folgendermaßen bestimmen:

Intervall	Herleitung	Beispiel
Ausgangston	-	a' = 440 Hz
1. Halbton	Ausgangston * $2^{1/12}$	b' = 440 * 1.05946309436 Hz = 466.163761518 Hz
2. Halbton	Ausgangston * $2^{2/12}$	h' = 440 * 1.12246204831 Hz = 493.883301256 Hz
3. Halbton	Ausgangston * $2^{3/12}$	c'' = 440 * 1.189207115 Hz = 523.251130601 Hz
4. Halbton	Ausgangston * $2^{4/12}$	cis'' = 440 * 1.25992104989 Hz = 554.365261954 Hz
5. Halbton	Ausgangston * $2^{5/12}$	d'' = 440 * 1.33483985417 Hz = 587.329535835 Hz
6. Halbton	Ausgangston * $2^{6/12}$	es'' = 440 * 1.41421356237 Hz = 622.253967444 Hz
7. Halbton	Ausgangston * $2^{7/12}$	e'' = 440 * 1.49830707688 Hz = 659.255113826 Hz
8. Halbton	Ausgangston * $2^{8/12}$	f'' = 440 * 1.58740105197 Hz = 698.456462866 Hz
9. Halbton	Ausgangston * $2^{9/12}$	fis'' = 440 * 1.68179283051 Hz = 739.988845423 Hz
10. Halbton	Ausgangston * $2^{10/12}$	g'' = 440 * 1.78179743628 Hz = 783.990871963 Hz
11. Halbton	Ausgangston * $2^{11/12}$	gis'' = 440 * 1.88774862536 Hz = 830.60939516 Hz
12. Halbton	Ausgangston * $2^{12/12}$	a'' = 440 * 2 Hz = 880 Hz

Andere gleichstufige Skalen: Dritteltöne, Vierteltöne, Fünfteltöne, Sechsteltöne, ...

Dieses Verfahren lässt sich auf beliebige Unterteilungen der Oktave anwenden. Man muss nur angeben, wieviele Schritte pro Oktave man hat, und dann setzt man den entsprechenden Faktor ein. Ein paar Beispiele:

- *Dritteltöne* entstehen, wenn man die Oktave in 18 gleiche Schritte teilt. Ein Drittelton über a'=440Hz berechnet sich als $440 * 2^{1/18} = 457.274$ Hz.
- *Vierteltöne* entstehen, wenn man die Oktave in 24 gleiche Schritte teilt. Ein Viertelton über a'=440Hz berechnet sich als $440 * 2^{1/24} = 452.893$ Hz.
- *Fünfteltöne* entstehen, wenn man die Oktave in 30 gleiche Schritte teilt. Ein Fünftelton über a'=440Hz berechnet sich als $440 * 2^{1/30} = 450.285$ Hz.
- *Sechteltöne* entstehen, wenn man die Oktave in 36 gleiche Schritte teilt. Ein Sechstelton über a'=440Hz berechnet sich als $440 * 2^{1/36} = 448.554$ Hz.

All diese Unterteilungen beruhen auf der Unterteilung des Ganztones. Daher auch die Namen: ein *Drittel*ton ist der *dritte* Teil eines *Ganz*tons, ein *Viertel*ton der *vierte* Teil eines *Ganz*tons, usw.

Man kann die Oktave aber auch in jede beliebige andere Anzahl von gleichen Stufen teilen. Im 16. Jahrhundert beispielsweise gab es als Exotismus die 19-Teilung der Oktave (Salinas, Costeley).

Andere Rahmenintervalle: Bohlen-Pierce, Studie II, ...

Ebenso kann man statt der Oktave ein beliebiges anderes Intervall nehmen, das man durch gleiche Schritte unterteilt. Solche Systeme gibt es - so weit ich weiss - erst im 20. Jahrhundert, denn sie greifen doch sehr stark in eine fundamentale Hörweise ein, indem man zwei Töne, die im Oktavabstand voneinander stehen, nicht mehr als "gleich" hören kann. Beispiele für solche Skalen:

- Die *Bohlen-Pierce Skalen*, die von dem Verhältnis 1:3 (also akustisch reine Duodezime) ausgehen, und diese beispielsweise in 13 gleiche Schritte unterteilen. Ein Schritt über a'=440Hz berechnet sich dann als $440 * 3^{1/13} = 478.800$ Hz.
- Stockhausen verwendet in seiner *Studie II* eine Skala, die das Verhältnis 1:5 (also Doppeloktave plus akustisch reine große Terz) in 25 gleiche Teile teilt. Ein Schritt über a'=440Hz berechnet sich dann als $440 * 5^{1/25} = 469.258$ Hz, ist also etwas größer als ein Halbton im zwölfstufigen System.

Konsequenzen der Gleichstufigkeit

1. Das System ist in sich völlig widerspruchsfrei und lässt sich leicht berechnen. Man könnte sagen, es handele sich um völlige Gleichmacherei; oder um ein System ohne Widerstände.
2. Außer der Oktave (oder allgemein gesagt: dem Rahmenintervall) ist kein Intervall akustisch rein, also schwebungsfrei. Man könnte sagen, es komme doch zu einem Widerspruch; nicht intern, aber mit der Obertonstruktur.

jh 2010