Rechnen mit Frequenzen III: Cents

Definition

Ein Cent entsteht, wenn man einen Halbton der 12-stufigen Skala in 100 gleiche Teile teilt. Anders gesagt, wird eine Oktave in 1200 gleiche Schritte geteilt: Ein Cent entspricht dem Faktor $2^{1/1200}$. Wollen wir also die Frequenz bestimmen, die einen Cent über a'=440Hz liegt, müssen wir rechnen $440*2^{1/1200}$ und erhalten als Ergebnis 440.254 Hz.

Die Einheit Cent hat sich durchgesetzt, weil man sich unter einem Cent als 1/100 Teil eines Halbtons etwas vorstellen kann, und weil ein Cent ungefähr dem Minimum an Unterscheidbarkeit von Tonhöhen entspricht. Ein Cent ist also klein genug, um damit gut verschiedene Skalen vergleichen zu können.

Vergleich zweier Frequenzen oder Proportionen durch die Einheit Cent

Wenn wir fragen, wieviel Cent einem bestimmten Intervall entspricht, suchen wir nach dem Exponenten auf der Basis 2. Ein gegebenes Intervall $\boldsymbol{I}$ (als Verhältniszahl, also z.B. 3/2 oder 1.5 für die Quinte) steht mit einer gesuchten Centgröße $\boldsymbol{c}$ in folgendem Verhältnis:

$$\boldsymbol{I} = 2^{c/1200}$$

Ist das Intervall die Oktave, lautet die Gleichung $2 = 2^{c/1200}$, und die Lösung ist klar: für c=1200 stimmt die Gleichung ($2^{1200/1200}=2^1=2$). Für alle anderen Intervalle liegt die Lösung aber nicht so auf der Hand, weil wir nach einer Zahl suchen, die als Exponent ("Hochzahl") einer anderen Zahl (hier: 2) auftaucht.

Diese Suche nach dem Exponenten heisst mathematisch, dass wir nach dem *Logarithmus* suchen; in diesem Fall nach dem Logarithmus zur Basis 2:

$$\boldsymbol{c}/1200 = \log_2 \boldsymbol{I}$$

oder:

$$\boldsymbol{c} = \log_2 \boldsymbol{I} * 1200$$

Für den einfachen Fall, dass das Intervall eine Oktave ist, erhalten wir:

$$\text{cent} = \log_2 2 * 1200$$
$$\text{cent} = 1 * 1200$$

Das Ergebnis sind also die erwarteten 1200 Cent.

Mit dieser Formel kann man für das Verhältnis zweier Frequenzen oder Proportionen zueinander die Centdifferenz ausrechnen. Beispiele:

- Wie groß ist der Centabstand zwischen 440 und 457 Hertz? Antwort:
  cent = $\log_2(457/440) * 1200 = 65.629$ Cent (ungefähr ein Drittelton)
- Wieviel Cent entspricht der Proportion 5/4, also der akustisch reinen großen Terz? Antwort:
  cent = $\log_2(5/4) * 1200 = 386.314$ Cent
  Die akustisch reine große Terz ist also knapp 14 Cent tiefer als die gleichschwebend temperierte, die 400 Cent hat.

So kann man für alle akustisch reinen (= der Obertonstruktur entsprechenden) Intervalle die Differenzen zur gleichschwebend temperierten Stimmung in Cent bestimmen. Das sind die Ergebnisse, auf drei Kommastellen gerundet:

Proportion/Intervall	Beispiel	Abstand in Cents	Das heisst
3:2 = Quinte	c - g	$\log_2(3/2)$ * 1200 = 701.955 Cent	die Quinte auf dem Klavier (700 Cent) ist knapp 2 Cent zu klein
4:3 = Quarte	c - f	$\log_2(4/3)$ * 1200 = 498.045 Cent	die Quarte auf dem Klavier (500 Cent) ist knapp 2 Cent zu groß
5:4 = Große Terz	c - e	$\log_2(5/4)$ * 1200 = 386.318 Cent	die große Terz auf dem Klavier (400 Cent) ist knapp 14 Cent zu groß
6:5 = Kleine Terz	c - es	$\log_2(6/5)$ * 1200 = 315.641 Cent	die kleine Terz auf dem Klavier (300 Cent) ist gut 15 Cent zu klein
7:6 = ?!?	c - b	$\log_2(7/4)$ * 1200 = 968.826 Cent	die kleine Sept auf dem Klavier (1000 Cent) ist etwa einen Sechstelton (31 Cent) tiefer als der siebte Teilton (7/1,zwei Oktaven tiefer = 7/4)
9:8 = Großer Ganzton	c - d	$\log_2(9/8)$ * 1200 = 203.910 Cent	der Ganzton auf dem Klavier ist knapp 4 Cent kleiner als der pythagoräische ("große") Ganzton
10:9 = Kleiner Ganzton	d - e	$\log_2(10/9)$ * 1200 = 182.404 Cent	der Ganzton auf dem Klavier ist knapp 18 Cent größer als der "kleine" Ganzton
16:15 = Kleine Sekunde (als 4/3 * 4/5)	c - des	$\log_2(16/15)$ * 1200 = 111.731 Cent	die kleine Sekunde auf dem Klavier ist etwa 12 Cent kleiner als die akustisch reine große Terz (5/4) unter der Quarte (4/3)
25:24 = übermäßige Prime (als 5/3 * 5/4)	c - cis	$\log_2(25/24)$ * 1200 = 70.672 Cent	die übermäßige Prime auf dem Klavier ist etwa 29 Cent größer als die akustisch reine große Terz (5/4) über der großen Sexte (5/3)

Rechentipp

Die meisten Taschenrechner, und auch viele Programmiersprachen, können einen Logarithmus zur Basis 2 nicht direkt berechnen, sondern nur den Logarithmus zur Basis 10 (abgekürzt meist *log*) oder zur Basis e, der Eulerschen Zahl (abgekürzt meist *ln*). Da hilft folgende Rechenregel:

$\log_2(x) = \log(x)/\log(2)$ oder $\log_2(x) = \ln(x)/\ln(2)$

In Worten: Will man den Logarithmus einer Zahl x zur Basis 2 wissen, so kann man auch den Zehnerlogarithmus dieser Zahl x bestimmen und ihn dann durch den Zehnerlogarithmus von 2 teilen. Das gleiche gilt für ln statt log.

Will ich zum Beispiel in Csound den Centunterschied zwischen 400 und 444 Hz berechnen, sieht das so aus:

```
icent  = log(400/444) / log(2) * 1200
```

Als Ergebnis gibt Csound -180.672 heraus; das heisst: 400 Hz ist etwa 180 Cent tiefer als 444 Hz.

In PD kann man es entweder grafisch machen oder mit dem Objekt expr: